Введение

Актуальность работы. Диссертационная работа посвящена постановке и разработке аналитических и приближенных аналитических методов решения краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами и анализу резонансных свойств этих объектов. Актуальность проблемы обусловлена тем, что в настоящее время вопросы надежности при проектировании технических объектов требуют все более полного учета динамических явлений. Широкое распространение в технике объектов с движущимися границами обусловливает необходимость развития методов математического моделирования их динамики и создания алгоритмического программного обеспечения для соответствующего анализа.

Задача о колебаниях систем с движущимися границами связана с получением решения систем дифференциальных уравнений в частных производных в переменных во времени областях. Такие задачи в настоящее время изучены недостаточно. Использование известных методов математической физики ограничено в основном классом задач с фиксированными границами.

Сложности, возникающие при постановке такого рода задач и получении их решений, объясняет тот факт, что до настоящего времени не существует достаточно общего подхода к анализу особенностей динамики таких систем. Полученные результаты ограничены в основном качественным описанием динамических явлений. Получению количественных характеристик, которые могли бы иметь практическую ценность, в известных публикациях уделено недостаточное внимание.

В настоящее время отсутствует не только комплексный подход для математического моделирования колебаний одномерных механических систем с движущимися границами, учитывающий геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от границы, но и не сформулированы постановки такого рода задач. Решение вышеперечисленных проблем позволяет разработать строгие приближенные методы анализа резонансных свойств колеблющихся объектов с движущимися границами. Вышеизложенное и определяет актуальность диссертационной работы.

Рассмотренные в диссертации методы постановки и решения задач рассматриваемого типа, а также методы анализа резонансных свойств позволяют решить проблемы, возникающие при изучении колебаний объектов с движущимися границами.

Цель диссертационной работы состоит в разработке математической модели, описывающей колебания одномерных по пространственной координате объектов с движущимися границами; обобщении и развитии приближенных аналитических методов для решения задач рассматриваемого класса; создании алгоритмического и программного обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами.

Научная новизна выполненной работы заключается в следующем:

1) Разработана новая математическая модель для моделирования анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающая геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы, в частных случаях малых колебаний совпадающая с классическими линейными моделями;

2) Для моделирования колебаний систем с подвижными границами разработан и реализован аналитический метод решения волнового уравнения, позволяющий получить решение с более широким спектром условий на подвижных границах, в отличие от известных задач аналогичного типа с граничными условиями первого рода;

3) Выполнено обобщение приближенного аналитического метода Канторовича – Галѐркина на более широкий класс задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жѐсткость и жѐсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах;

4) Разработана методика моделирования и численного исследования резонансных эффектов для объектов с движущимися границами, позволяющая учитывать возможность возникновения явления установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс; выполнен анализ зависимости амплитуды динамических мод разного порядка и границ резонансной области от относительной скорости границ с оценкой погрешности этих параметров;

5) В среде Matlab разработан программный комплекс «TB–ANALYSIS», предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач;

6) проведено исследование новых качественных и количественных свойств разработанных моделей.

Теоретическая и практическая значимость результатов работы заключается в разработке и исследовании новых математических моделей, описывающих колебания объектов с движущимися границами в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

В теоретическом плане практическая значимость заключается в нелинейной постановке краевых задач с движущимися границами, аналитическом и приближенном аналитическом методах их решений, методике моделирования и численного исследования резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими краевыми задачами.

Прикладная ценность результатов работы заключается в возможности использования их для решения широкого круга технических проблем: анализе продольных и изгибных колебаний валов, балок и стержней с подвижными закреплениями; оценке надежности работы канатов в грузоподъемных установках и динамической устойчивости нитей, волокон и тесемочных передач; анализе колебаний лент в лентопротяжных механизмах, ленточных пилах, гибких звеньях передач с гибкой связью; исследовании колебаний проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой; управлении технологией изготовления кабелей, проката; оценке надежности работы железнодорожной контактной сети и т.д. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств и проблема увеличения интенсивности колебаний при уменьшении длины объекта. Результатами такого анализа могут стать: повышение надежности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчетов конструкций на динамическую прочность. Полученные в работе теоретические положения и практические результаты частично внедрены в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное конструкторско – технологическое бюро «Пластик» (г.Сызрань, Самарская область).

Глава 1
Аналитический обзор

Известно, что одномерная по пространственной координате задача о колебаниях механических объектов с движущимися границами впервые была поставлена Николаи Е.Л. в 1921 году [109]. Он получил точное решение для волнового уравнения

$$U_{xx}(x,t) - a^2 U_{tt}(x,t) = 0 \qquad (1.1)$$

при граничных условиях первого рода, заданных на одной неподвижной и одной движущейся границе,

$$U(0,t) = 0; \;\; U(\ell(t),t) = 0 \qquad (1.2)$$

и начальных условиях

$$U(x,0) = f_1(x); \;\; U_t(x,0) = f_2(x).$$

Поставленная им задача была решена при равномерном законе движения границы $\left(\ell(\mathrm{t}) = \ell_0 + vt\right)$. На основании данного решения была исследована энергетическая сторона колебаний.

Интенсивное развитие данное направление получило в конце 50–х годов двадцатого века в связи с быстрым развитием и совершенствованием разного рода технических устройств. При этом возникли такие проблемы, как надежность работы канатов и тросов в подъемных установках – О.А. Горошко, Л.В. Колосов, Г.Н. Савин, А.М. Столяр [43, 45, 69, 70, 119, 111]; устойчивость колебаний нитей, волокон и тесемочных передач – В.А. Горбань, Ю.В. Якубовский [39 – 41, 133]; предотвращение колебаний кабелей, проволоки и проката на линиях их изготовления и магнитных лент в лентопротяжных механизмах – К.И. Рагульский [116]; уменьшение вибраций ленточных пил – С. Моут [106] и передач с гибкой связью – Я. Кожешник, В.А. Светлицкий [67, 125]. Проблема охватывает и такие явления, как колебания ленточных конвейеров – К.К. Мулухов, Х.С. Хосаев [107, 130], устойчивость горения твердого топлива – С.К. Асланов [23], вибрации тел под действием движущихся нагрузок – Н.Ф. Курильская, Dan Stancioiu , Lu Sun [84, 157, 158], колебания проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой – В.Г. Коровин [71], надежность работы железнодорожной контактной сети – А.Д. Сергеев, Aboshi Mitsuo, Cho Yong Hyeon [127, 135, 138], предотвращение продольных, поперечных, изгибных и крутильных колебаний струн, валов, балок, канатов и стержней с подвижными закреплениями – А.И. Весницкий, О.А. Горошко, М.В. Икрамов, В.П. Ястребов, Kotera Tadashi [28, 30 – 34, 36, 43, 44, 59, 134, 144], колебания систем, имеющих переменную зону контакта – С.А. Владимиров [38] и т.д.

Аналогичные задачи с движущимися границами возникают и при решении уравнений теплопроводности и диффузии. В частности, задача Стефана. Такие задачи рассмотрены в работах В.А. Кудинова, И.В. Кудинова, А.В. Еремина [74–77] и других авторов.

Исследованию смежного класса задач граничного управления посвящена большая серия статей В. А. Ильина, Е. И. Моисеева [54 – 58, 105]. Для волнового и телеграфного уравнений авторы рассматривают задачи с начальными и финальными условиями, устанавливают возможность перевода описываемого уравнением объекта из начального состояния в финальное с помощью граничных функций и строят управления в явном виде. Граничные функции, построенные В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым, позволили им перейти к решению задачи об оптимальном управлении, когда среди множества решений необходимо выделить то, которое доставляет минимум некоторому заданному функционалу. Результаты Андреева А. А., Егорова А. И., Знаменской Л. Н., Ильина В. А., Козловой Е.А., Лексиной С. В., Моисеева Е. И. [3, 4, 52, 54 – 58, 68, 88, 89, 105] и многих других авторов являются основой для исследования задач управления для уравнений и систем уравнений гиперболического типа.

Даже в линейной постановке решение задач гиперболического типа с условиями на движущихся границах связано со значительными математическими трудностями. Наличие условий на движущихся границах делает неприменимыми к данной проблеме традиционные методы математической физики.

При решении задач о колебаниях систем с движущимися границами используются как аналитические, так и приближенные методы. Начало исследований в данной области было основано на аналитических методах Е.Л. Николаи [109]. Аналитическим решениям проблемы посвящены работы Самарина Ю.П. [121, 124]. В этих работах на основании метода продолжения начальных условий за пределы исходного участка доказано существование и единственность решений линейных гиперболических уравнений, имеющих функцию Римана, в переменных во времени областях. Дальнейшее развитие точные методы получили в работах А.И. Весницкого [31, 32], В.А. Горбаня [39], Г.А. Григоряна [47], Г.А. Гринберга [50], А.И. Потапова [113] и др.

Известные аналитические решения линейных задач можно разделить на четыре класса:

а) автомодельные решения;

б) разложение решений по системе мгновенных собственных функций;

в) сведение задачи к решению интегро–функциональных соотношений;

г) остановка границ введением новых переменных.

Автомодельные решения получены для волнового уравнения и для уравнений колебаний круглой мембраны Ю.П. Самариным [121, 123, 124], для телеграфного уравнения Я. Кожешником [67], для уравнения изгибных колебаний В.П. Ястребовым [134]. Недостаток таких решений состоит в том, что они справедливы для областей, расширяющихся в автомодельном режиме из точки. Кроме того, отсутствие модовой структуры в решении затрудняет его анализ.

Предложенный Г.А. Гринбергом метод разложения в ряд по полной в каждый момент времени системе соответствующих собственных функций для резонатора с неподвижной границей, совпадающей в данный момент времени с границей рассматриваемого нестационарного резонатора, приводит к необходимости решения бесконечной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [48 – 50]. Решение данной системы затруднительно, и в упоминаемых выше публикациях не указывается, как можно получить конкретный результат.

Сведение задачи к интегро–функциональным соотношениям может осуществляться различными способами, например, с помощью известных из математической физики интегральных и функциональных представлений решений дифференциальных уравнений в частных производных – А.И. Весницкий, С.П. Пустовойт, А.Г. Раздольский, [33, 36, 114, 115, 117]. Наиболее часто здесь используется представление Римана. Интегро–функциональное уравнение может быть также получено в результате применения к задаче интегральных преобразований – И.М. Рушкевич [118]. Из точных методов решения получаемых здесь уравнений универсален только метод последовательных продолжений (итераций), однако он позволяет получить достаточно простое решение только для волн, два–три раза провзаимодействовавших с границами.

Наиболее эффективным из известных на сегодняшний день аналитических способов решения задач о колебаниях систем с движущимися границами является метод, основанный на введении новых переменных, останавливающих границы. Вообще, найти замену переменных, останавливающих границы, несложно, например:

$$\xi = \frac{x - \ell_1(t)}{\ell_2(t) - \ell_1(t)}; \tau = t,$$

где $\ell_1(t)$ и $\ell_2(t)$ – законы движения границ, x – пространственная координата, t – время. Однако данная замена настолько усложняет уравнение, что получаемая в результате задача оказывается сложнее исходной. Долгое время исследователи шли по пути эвристического подбора переменных для каждой конкретной задачи. При этом они стремились к тому, чтобы новое уравнение либо было «разделяющимся» – К.А. Барсуков, О.А. Горошко [25, 45], либо его коэффициенты зависели бы только от пространственной координаты – О.А. Стеценко [128]. Весницким А.И. был предложен достаточно общий метод подбора новых переменных для волнового уравнения [31, 32, 35, 36]. Следуя этому методу, замена переменных производится в следующем виде:

$$\zeta = g(t + x/a) - G(t - x/a);$$
$$\eta = a^{-1}[g(t + x/a) + G(t - x/a)],$$

где a – скорость распространения колебаний; g и G – некоторые функции. В результате такой замены исходное уравнение остается инвариантным (волновым), а g и G определяются из условия постоянства ζ на границах $x = \ell_1(t), x = \ell_2(t)$.

При этом g и G определяются из системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} g(t + \ell_1(t)/a) - G(t - \ell_1(t)/a) = 0; \\ g(t + \ell_2(t)/a) - G(t - \ell_2(t)/a) = \ell = \text{const}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Существование решения данной системы доказано в работе [36].

Решить (1.3), вообще говоря, нелегко. Однако можно ставить обратные задачи, т.е. по заданным g и G находить законы движения границ. На этой основе А.И. Весницким [33, 36] и А.И. Потаповым [113] были получены решения для достаточно широкого круга законов движения границ.

Несколько иной подход к нахождению переменных был применен в работах К.А. Барсукова и Г.А. Григоряна и [25, 26, 46, 47]. Здесь одномерное волновое уравнение посредством формальной замены геометрической переменной на чисто мнимую величину преобразуется в двухмерное уравнение Лапласа. В ряде случаев удается подобрать аналитическую функцию, осуществляющую конформное отображение заданной области на бесконечную полосу таким образом, чтобы в новом уравнении переменные разделялись.

Заметим, что введение новых переменных приводит к усложнению граничных условий задачи. В связи с этим метод замены переменных применяется в основном для граничных условий первого рода. Вторым недостатком метода замены переменных является то, что начальные условия задачи должны быть заданы не при $t=0$, а на линии, определяемой уравнением $g(t+x/a)+G(t-x/a)=0.$

Более универсальны приближенные методы, класс их широк. Сюда относятся, например, методы, применяемые для преодоления трудностей, возникающих на том или ином этапе получения точного решения: приближенное решение бесконечной системы дифференциальных уравнений, возникающей при использовании метода разложения по мгновенным собственным функциям; пренебрежение отдельными членами уравнения после введения новых переменных; приближенное решение системы (1.3) и интегро–функциональных уравнений и другие.

Заметим, что в большинстве случаев, встречающихся на практике, границы механических объектов движутся медленно по сравнению со скоростью распространения колебаний. Большинство приближенных решений получено применительно именно к таким системам. Самым распространенным здесь является метод Галеркина [74 – 77] в совокупности с методом Крылова–Боголюбова–Митропольского [27, 61, 104]. Метод заключается в асимптотическом разложении решения по степеням малого параметра. Он был развит применительно к динамике канатов шахтных грузоподъемников О.А. Горошко, Г.Н. Савиным и А.М. Столяром и [43, 119, 111]. Применительно к электродинамическим объектам данный подход использовал В.М. Корчинский [72]. Возможности этого метода очень широки. Так, с его помощью можно рассчитать продольно–поперечные колебания струн, изгибные колебания, волновые явления в вязкоупругих объектах.

Другим важным приближенным методом в динамике систем с движущимися границами является метод Канторовича [61] в совокупности с методом Галеркина [131].

Суть метода заключается в отыскании решения в виде

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x,t), \tag{1.4}$$

где $X_n(x,t)$ – удовлетворяют граничным условиям задачи, а $f_n(t)$ находятся из условия, чтобы решение (1.4) удовлетворяло уравнению $L[U(x,t)]=\varphi(x,t)$. Здесь L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ; $\varphi(x,t)$ – заданная функция класса C.

На основе метода Галеркина для определения $f_n(t)$ получается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\int\limits_{\ell_1(t)}^{\ell_2(t)} L[U(x,t)]\, X_n(x,t)dx = \int\limits_{\ell_1(t)}^{\ell_2(t)} \varphi(x,t)\; X_n(x,t)dx; \quad n=1,2,3....$$

Данный метод использовался Лежневой А.А. в статье [86] для расчета продольных колебаний стержня и в статье [87] – для описания изгибных колебаний балки.

Свойства систем с движущимися границами можно разделить на два вида: волновые и резонансные.

Подробное рассмотрение волновых свойств систем, колебания в которых описываются одномерным волновым уравнением, при граничных условиях первого рода рассмотрены А.И. Весницким и А.И. Потаповым [28, 31, 32, 35, 36, 113]. В данных работах с помощью решений, полученных на основе метода замены переменных, выделены следующие характерные явления:

1) соотношение между частотами падающей волны и волны, отраженной от движущейся границы, записывается в виде двойного закона Доплера $\dfrac{\omega_{пад.}}{\omega_{отр.}}=\dfrac{a-\ell'(t)}{a+\ell'(t)}$, где a – скорость распространения волн; $\ell(t)$ – закон движения границы;

2) отношение плотности энергии волны к квадрату ее мгновенной частоты не изменяется при отражении от движущейся границы;

3) для произвольного закона движения границы доказано, что энергия системы возрастает при уменьшении длины колеблющейся части и уменьшается при увеличении длины;

4) возможно возбуждение импульсных колебаний; например, при периодическом законе движения границы возможно получение в струне импульсов высокой частоты, причем с каждым новым отражением частота импульсов растет, и в случае, когда приток энергии от движущейся границы больше, чем ее рассеяние, наблюдается параметрическая неустойчивость, что было теоретически обосновано Весницким А.И.

В системах с движущимися границами возможны три вида резонансных явлений: установившийся резонанс (используется также термин «обобщенный резонанс»), прохождение через резонанс и параметрический резонанс.

Если на систему с переменными границами действует сила, изменяющаяся по такому же закону, что и собственные частоты, то при этом будет наблюдаться непрерывное во времени увеличение амплитуды. Такое явление принято называть установившимся резонансом. Впервые он был рассмотрен Г.О. Гореликом [42].

Прохождение через резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты. Максимум амплитуды достигается спустя некоторое время после прохождения критической длины, когда одна из собственных частот, в случае, если границу остановить, становится равной возмущающей частоте. При этом, чем меньше скорость прохождения через критическую длину, тем большей величины достигает амплитуда колебаний.

Параметрический резонанс возникает при согласовании колебательного процесса и закона движения границы, например, при периодическом изменении длины объекта – А.И. Весницкий [36].

В настоящее время приемлемых аналитических или приближенных методов описания параметрического резонанса не существует. Для его описания необходимо использовать численные методы.

В большинстве статей, посвященных изучению колебаний объектов с движущимися границами, авторы ограничиваются главным образом только указанием на возможность возникновения резонансных явлений. Работа, где приводятся численные характеристики этого явления, – монография О.А. Горошко, Г.Н. Савина [45], в которой рассматривается прохождение через резонанс упругой нити переменной длины с грузом на конце.

Особо стоит вопрос об изучении резонансных свойств систем, границы которых движутся равномерно с равными скоростями, при этом длина колеблющейся части не изменяется (например, ременная передача). Здесь резонанс характеризуется набором постоянных собственных частот. Изучению таких систем посвящены статьи А.И. Весницкого, О.А. Горошко, Я. Кожешника, Р.С. Курендата [31, 36, 44, 67, 82] и другие.

Погрешности описания колебаний линейными моделями заложены уже на этапе постановки задач. Рассматриваемые граничные условия ограничены в основном условиями первого рода типа (1.2) и не предусматривают взаимодействия между частями объекта слева и справа от границы. При быстром движении границы и уменьшении длины колеблющейся части интенсивность колебаний неограниченно возрастает, что говорит о некорректности использования в этих случаях линейных моделей.

Становится очевидной потребность в расширении круга задач, моделирующих колебания объектов с движущимися границами, а также методов их решения и программной реализации, которая формулируется в виде **основной цели настоящей диссертационной работы**: разработка математической модели, описывающей колебания одномерных по пространственной координате объектов с движущимися границами; обобщение и развитие приближенных аналитических методов для решения задач рассматриваемого класса; создание алгоритмического и программного обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами.

Для достижения поставленной цели решаются следующие взаимосвязанные **научные задачи:**

1) разработка новых математических моделей для анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающих геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы;

2) обобщение приближенного аналитического метода Канторовича – Галѐркина на более широкий класс задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жѐсткость и жѐсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах;

3) разработка аналитического метода решения волнового уравнения, позволяющего получить решение с более широким спектром условий на подвижных границах, в отличие от известных задач аналогичного типа с граничными условиями первого рода (1.2);

4) разработка методики моделирования резонансных эффектов для объектов с движущимися границами, позволяющей учитывать возможность возникновения явления установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс;

5) разработка алгоритмического и программного обеспечения, реализующего аналитические и приближенные аналитические методы для исследования модельных краевых задач и анализа расчета колебательных и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами;

6) исследование новых качественных и количественных свойств разработанных математических моделей.