

УДК 621.318.472.5.998.7.319.8.001.24

Анализ флуктуаций нестационарных параметров режима энергосистем с помощью структурных функций

ФИШМАН М. М., канд. техн. наук

ВНИИЭ

Оперативное управление энергосистемами и энергообъединениями осуществляется с использованием телеизмерений флуктуирующих параметров режима [1]. Специальная цифровая обработка дискретных по времени и уровню телеизмеряемых (ТИ) процессов, происходящих в пунктах передачи и приема (фильтрация, выделение смещения среднего уровня параметров режима и оценка скорости этого смещения), позволяет извлечь из них наиболее ценную для управления информацию. В частности, может быть обнаружена разладка режима, характеризующая изменением среднего уровня или скорости смещения, при котором режим из нормального перешел в утяжеленный, характеризующийся пониженной надежностью [2]. Для создания оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов указаний обработки (например, [2-5]), а также для оценки точности и эффективности дискретного представления ТИ процессов [1, 5, 6] необходимо знание основных характеристик флуктуаций этих процессов: дисперсии, времени корреляции и др.

Большая часть результатов, относящихся к анализу коррелированных флуктуаций, получена в предположении, что исследуемый процесс является стационарным [7-10]. Однако в электроэнергетических задачах это допущение не всегда выполняется. Действительно, при оценивании дисперсии σ^2 гауссовского случайного процесса $\mu(t)$, $t \in [0, T]$, имеющего нулевое математическое ожидание, время корреляции τ^* и корреляционную функцию $\{K(t)\}$

$$R(x) = \sigma^2 \exp[-x|\tau|/\tau^*], \quad (1)$$

дисперсия $D\{(\sigma^2)_T\} \sim M\{(\sigma^2)_T - \sigma^2\}^2$ статистической оценки

$$(\sigma^2)_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mu^2(t) dt \quad (2)$$

определяется соотношением [8]:

$$D\{(\sigma^2)_T\} = \frac{\sigma^4 (\tau^*)^2}{T^2} \left(\frac{2T}{\tau^*} - 1 + e^{-2T/\tau^*} \right).$$

При $T \gg \tau^*$ имеем

$$D\{(\sigma^2)_T\} / \sigma^4 \approx 1/2 \tau^* / T. \quad (3)$$

Отсюда видно, что для оценивания дисперсии с 25 % - ной точностью необходимо, чтобы длительность T реализации примерно в 12 раз превышала время корреляции. Даже для довольно быстрых параметров режима, имеющих время корреляции 200 с, требуемая длительность $T \approx 2$ ч. В пределах столь значительных временных интервалов средний уровень ТИ процесса может претерпеть существенные изменения (резкие ступенчатые, гладкие полиномиальные), и применение стандартных методов оценивания [7, 8], ориентированных на стационарные процессы, приводит к большим ошибкам. Ограничена область применения и известного метода статистического анализа нестационарных процессов «по остаткам от тренда» [11]. Он приспособлен лишь для таких смещений среднего уровня, которые на всем интервале наблюдения $[0, T]$ описываются полиномиальной зависимостью от t , причем с ростом T степень полинома должна оставаться неизменной. В реальных условиях одновременно с ростом T приходится увеличивать степень полинома. В результате даже за счет увеличения T точность статистического анализа повысить не удается. Использование указанного метода в ситуациях, когда возможны ступенчатые смещения, также затруднительно, поскольку достаточно точная полиномиальная аппроксимация таких смещений требует высокой степени полинома — тем большей, чем больше T . В этих условиях достичь высокой точности оце-

навания дисперсии, времени корреляции и других вероятностных характеристик не удается.

Ниже излагается метод оценивания характеристик флуктуаций ТИ процесса, для которого указанные ограничения не являются обязательными. Он основан на использовании структурных функций, которые применялись прежде для решения задач фильтрации и прогнозирования случайных процессов со стационарными приращениями [8].

Модели и вероятностные характеристики флуктуаций ТИ процессов. Положим, что на интервале $[0, T]$ задан ТИ процесс $y(t)$:

$$y(t) = s_1(t) + \eta(t); \quad t \in [0, T],$$

где $\eta(t)$ — коррелированный стационарный процесс; $M[\eta(t)] = 0$; $M[\eta(t)\eta(t+\tau)] = R_\eta(\tau)$; КФ $R_\eta(\tau)$ не известна, $s_1(t)$ — функция, зависимость которой от t при фиксированном векторном параметре λ известна, но значение вектора и его размерность не известны.

Функции $\eta(t)$, $s_1(t)$ описывают флуктуации и средний уровень ТИ процесса соответственно. В частности, $s_1(t)$ может определять полиномиальный тренд [11] процесса

$$y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_p t^p + \eta(t), \quad (4)$$

либо резкое ступенчатое смещение.

$$y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \chi(t - \lambda_2) + \eta(t),$$

где $t \in [0, T]$; $l < \infty$; $\chi(u)$ — функция, равная 1 при $u > 0$ и нулю при $u < 0$.

В реальных условиях возможны комбинации [11] и ступенчатых смещений, например, $y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \chi(t - \lambda_2) + \eta(t)$, $t \in [0, T]$, когда вплоть до момента λ_2 процесс имеет постоянный средний уровень, а начиная с момента λ_2 , средний уровень меняется по линейному закону.

Важнейшими характеристиками флуктуаций являются дисперсия и время корреляции

$$\sigma_\eta^2 = R_\eta(0); \quad \tau_\eta^{cor} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \int_0^\infty |R_\eta(\tau)| d\tau, \quad (5)$$

а также величины

$$R_\eta^{(1)} = - \left. \frac{dR_\eta(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}; \quad R_\eta^{(2)} = - \left. \frac{d^2 R_\eta(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (6)$$

Коэффициент $R_\eta^{(1)} \geq 0$ характеризует скорость спада КФ; при $R_\eta^{(1)} = 0$ коэффициент $R_\eta^{(2)} \geq 0$ характеризует кривизну спада КФ в точке $\tau = 0$. Например, если $R_\eta(\tau)$ имеет вид (1), то $\tau_\eta^{cor} = \tau^*$, $R_\eta^{(1)} = \sigma_\eta^2 \tau^* > 0$. В случае, когда $R_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 \exp[-\tau^2/(\tau^*)^2]$, имеем $\tau_\eta^{cor} \approx 0.9 \tau^*$, $R_\eta^{(1)} = 0$, $R_\eta^{(2)} = \sigma_\eta^2/(\tau^*)^2 > 0$.

Величины $R_\eta^{(j)}$, $j = 1, 2$, используются, в частности, при определении погрешности представления ТИ процессов в случае дискретизации их по времени с шагом $T_\Delta \ll \tau_\eta^{cor}$. Так, если $y(t)$ — стационарный процесс, — n средний квадрат ошибки ступенчатой аппроксимации [6] определяется соотношением $\varepsilon^2 \approx R_\eta^{(1)} T_\Delta$ при $R_\eta^{(1)} \neq 0$ и соотношением $\varepsilon^2 \approx (2/3) R_\eta^{(2)} T_\Delta^2$, если $R_\eta^{(1)} = 0$, $R_\eta^{(2)} \neq 0$.

При обработке ТИ процесса в дискретном времени $t = t_i = (i-1)\Delta t$, $i = \overline{1, N}$, $T = (N-1)\Delta t$ с шагом Δt возможным в ряде случаев оказывается представление

$\eta(t)$ в виде суммы $\eta(t) = x(t) + \xi(t)$ взаимно некоррелированных процессов, таких, что разделенные интервалом Δt значения $x(t_i)$, $x(t_{i+1})$ являются сильно коррелированными, а значения $\xi(t_i)$, $\xi(t_{i+1})$ — некоррелированными. В этом случае

$$y(t) = s_1(t) + x(t) + \xi(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где времена корреляции $\tau_x^{cor} \gg \Delta t$, $\tau_\xi^{cor} \ll \Delta t$.

Будем называть $x(t)$ медленными флуктуациями ТИ процесса, а $\xi(t)$ — быстрыми флуктуациями. Основной характеристикой для $\xi(t_i)$ является дисперсия $\sigma_\xi^2 = M[\xi^2(t_i)]$, а для $x(t_i)$ — дисперсия $\sigma_x^2 = R_x(0)$, время корреляции τ_x^{cor} , скорость спада $R_x^{(1)}$ и кривизна спада $R_x^{(2)}$ КФ, определяемые аналогично (5), (6).

Нормированные структурные функции и их свойства. Пусть $y(t)$, $t \in [0, T]$ — ТИ процесс;

$$\Delta_y^{(p)}(\tau) = y(t+\tau) - y(t), \quad t \in [0, T-\tau] \quad (8)$$

его приращение p -го порядка. При $p \geq 2$ приращения p -го порядка определяются рекуррентной формулой

$$\Delta_y^{(p)}(\tau) = \Delta_y^{(p-1)}(\tau) - \Delta_y^{(p-1)}(\tau - \tau_1), \quad p \geq 2, \quad t \in [0, T - p\tau_1] \quad (9)$$

Математическое ожидание квадрата приращения

$$C_y^{(p)}(\tau) = M[|\Delta_y^{(p)}(\tau)|^2], \quad p \geq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

рассматриваемое как функция временного сдвига τ , представляет собой структурную функцию [8] p -го порядка. Для целей статистического анализа вместо структурных функций удобно рассматривать нормированные структурные функции (НСФ) $c_y^{(p)}(\tau)$, связанные с функциями (10) соотношением¹

$$c_y^{(p)}(\tau) = C_y^{(p)}(\tau)/b_p, \quad p \geq 1, \quad \tau \geq 0,$$

в котором

$$b_p = (p+1)(p+2) \dots 2p/p! \quad (11)$$

Положим, что $y(t)$ — процесс вида (4). Тогда при $p \geq 1$ приращение $\Delta_y^{(p)}(\tau) = \Delta_\eta^{(p)}(\tau)$, рассматриваемые как функции $t \in [0, T - p\tau]$, представляют собой стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием. Отсюда, используя [7], получаем формулы

$$c_y^{(p)}(\tau) = \sigma_\eta^2 - \frac{2p}{p+1} R_\eta(\tau) - \frac{12p(p-1)}{(p+1)(p+2)} R_\eta(2\tau) - \dots, \quad p \geq 1, \quad (12)$$

связывающие НСФ с дисперсией и КФ процесса $\eta(t)$.

Поскольку $R_\eta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau/\tau_\eta^{cor} \rightarrow \infty$, то с ростом τ устанавливается стационарный уровень НСФ, равный дисперсии.

$$c_y^{(p)}(\tau) \approx \sigma_\eta^2 \quad \text{при } p \geq 1, \quad \tau \gg \tau_\eta^{cor}. \quad (13)$$

Поведение НСФ при малых τ рассмотрим в предположении, что наблюдаемый с шагом Δt процесс имеет вид (7), а $s_1(t) = \sum_{n=0}^N \lambda_n t^n$ — полином степени l . В этом случае в области $\tau \geq \Delta t$ справедливо асимптотическое равенство

$$\Delta_y^{(1)}(\tau) = \Delta_x^{(1)}(\tau) + \Delta_\xi^{(1)}(\tau) + \lambda_1 \tau + O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow \Delta t,$$

¹ Если НСФ от τ не зависит, то индекс τ не записывается.

Возводя обе его части в квадрат и беря математическое ожидание, приходим к выражению для НСФ:

$$c_{\nu}^{(1)}(\tau) = \sigma_x^2 - \sigma_z^2 \cdot R_x(\tau) = \frac{1}{2} \lambda^2 \tau^2 + O(\tau^3), \quad \tau \rightarrow \Delta t. \quad (14)$$

При малых $\tau \gg 0$ КФ $R_x(\tau) = \alpha_x^2 - R_x^{(1)} \tau + O(\tau^2)$ и, согласно (14)

$$c_{\nu}^{(1)}(\tau) \approx \sigma_x^2 + R_x^{(1)} \tau, \quad \tau^{кор} \gg \tau \gg \Delta t. \quad (15)$$

В частности, если $R_x(\tau)$ определяется выражением (1), то

$$c_{\nu}^{(1)}(\tau) \approx \sigma_x^2 + (\sigma_x^2 / \tau_x^{кор}) \tau, \quad \tau_x^{кор} \gg \tau \gg \Delta t. \quad (16)$$

Как следует из (15), (16) при $R_x^{(1)} > 0$ НСФ линейно зависит от τ , но не зависит от λ и степени l ПТ. В случае $R_x^{(1)} = 0$, $R_x^{(2)} > 0$ с помощью (14) получаем

$$c_{\nu}^{(1)}(\tau) \approx \sigma_x^2 + [R_x^{(2)} + (1/2) \lambda^2] \tau^2, \quad \tau_x^{кор} \gg \tau \gg \Delta t.$$

В отличие от (15) зависимость от τ здесь квадратичная, причем НСФ определяется не только вероятностными характеристиками флуктуаций, но и коэффициентом λ ПТ.

Статистики для оценивания вероятностных характеристик. Рассмотрим статистику $\langle c_{\nu}^{(p)}(\tau) \rangle_T$ — выборочную НСФ p -го порядка, сформированную по результатам наблюдений процесса (9):

$$\langle c_{\nu}^{(p)}(\tau) \rangle_T = \frac{\Delta t}{(T - \Delta t) \Delta t} \sum_{i=1}^N [x_{\nu}^{(p)}(t_i)]^2, \quad p \geq 1, \quad (17)$$

где $t_i = (i-1)\Delta t$, $N = (T/\Delta t) - 1$, $t_i = \tau_i \Delta t$.

Для процесса вида (4) статистики (17) при $p \geq l \geq 0$ комплексуют влияние ПТ

$$\langle c_{\nu}^{(p)}(\tau) \rangle_T = \langle c_{\eta}^{(p)}(\tau) \rangle_T, \quad p \geq l \geq 0$$

и являются несмещенными оценками НСФ процесса $\eta(t) = x(t) + \xi(t)$, т. е.

$$M[\langle c_{\nu}^{(p)}(\tau) \rangle_T] = c_{\eta}^{(p)}(\tau), \quad p \geq l. \quad (18)$$

Здесь $c_{\eta}^{(p)}(\tau) = c_{\nu}^{(p)}(\tau)$ определяется из (12). Особенно ценно то, что указанный комплексует имеет место даже в случае, когда представление ТИ процесса в виде (4) справедливо не на всем интервале $[0, T]$, а лишь в пределах любого интервала длительности $\tau^{кор} \gg \tau$, $p \geq l$, целиком расположенного внутри интервала наблюдения $[0, T]$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда нестационарность процесса проявляется в наличии не только ПТ, но и ступенчатого смещения:

$$y(t) = \sum_{k=0}^l \lambda_k t^k + \gamma_1 \chi(t - \gamma_2) + \eta(t), \quad t \in [0, T],$$

Величина γ_1 и момент появления $\gamma_2 \in [0, T]$ этого смещения неизвестны. В данном случае статистики (17) при всех $p \geq l$ являются асимптотически несмещенными для оценивания НСФ флуктуационной составляющей:

$$\lim_{T/(T+\Delta t) \rightarrow \infty} M[\langle c_{\nu}^{(p)}(\tau) \rangle_T] = c_{\eta}^{(p)}(\tau), \quad p \geq l \quad (19)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что если $l=0$, $p=1$, то

$$\langle c_{\nu}^{(1)}(\tau) \rangle_T = \langle c_{\eta}^{(1)}(\tau) \rangle_T + \frac{1}{2} \gamma_1^2 \frac{\tau}{T - \tau} = \frac{\gamma_1 \Delta t}{T - \tau} \times$$

¹ Под статистикой, как обычно, понимается функция от результатов наблюдений.

$$\times [\eta(\gamma_2 + \tau) - \eta(\gamma_2)], \quad (20)$$

и потому соотношение (19) выполнено. В общем случае, когда $p \geq l \geq 0$, имеем

$$\langle c_{\nu}^{(p)}(\tau) \rangle_T = \langle c_{\eta}^{(p)}(\tau) \rangle_T + \psi, \quad (21)$$

где ψ — случайная величина, математическое ожидание которой $M[\psi] \rightarrow 0$ при $T/(\tau - \Delta t) \rightarrow \infty$.

Беря математическое ожидание от обеих частей равенства (21) и переходя к пределу $T/(\tau - \Delta t) \rightarrow \infty$, получаем (19).

Отметим также, что согласно (20), (21)

$$\langle c_{\nu}^{(0)}(\tau) \rangle_T \approx \langle c_{\eta}^{(0)}(\tau) \rangle_T$$

при $p \geq l \geq 0$, $T \gg \tau - \Delta t$, т. е. при больших $T/(\tau - \Delta t)$ статистика (17) комплексует ступенчатые смещения среднего уровня. При этом их влияние на точность алгоритма оценивания, основанных на статистиках (17), можно не учитывать.

Оценивание дисперсии быстрых флуктуаций. Из соотношения (15) следует, что в качестве оценки дисперсии σ_x^2 может быть взята величина

$$\langle \sigma_x^2 \rangle_T = a_0, \quad (22)$$

где a_0 — коэффициент в разложении $\langle c_{\nu}^{(1)}(\tau) \rangle_T = a_0 + a_1 \tau + O(\tau^2)$ выборочной НСФ 1-го порядка при малых $\tau \gg \Delta t$. Если $\xi(t)$, $i \geq 1$ — гауссовские случайные величины, то дисперсия статистики (22)

$$D[\langle \sigma_x^2 \rangle_T] \approx \frac{(\Delta t)^2}{4(T - \Delta t)^2} \sum_{i=1}^{N-1} D[\{\xi(t_i + \Delta t) - \xi(t_i)\}^2] = \\ = 3[\Delta t(T - \Delta t)] \sigma^4.$$

Отсюда

$$\sqrt{D[\langle \sigma_x^2 \rangle_T]} / \langle \sigma_x^2 \rangle_T \approx \sqrt{3 \Delta t(T - \Delta t)}.$$

Таким образом, при фиксированном T точность оценивания дисперсии может быть повышена за счет сокращения шага дискретности Δt . Следует, однако, иметь в виду, что представление ТИ процесса в виде (9) остается в силе лишь при $\Delta t \gg \tau_x^{кор}$.

Оценивание скорости спада КФ. Рассмотрим вначале ситуацию, когда быстро флуктуирующая составляющая в процессе (7) отсутствует: $\sigma_z^2 = 0$. Тогда, как следует из (15) и (17),

$$M[\langle c_{\nu}^{(1)}(\tau) \rangle_T] \approx R_x^{(1)} \tau, \quad \tau_x^{кор} \gg \tau \gg \Delta t,$$

и в качестве оценки скорости спада можно брать статистику вида

$$\langle R_x^{(1)} \rangle_T = \langle c_{\nu}^{(1)}(\tau) \rangle_T / \tau, \quad \tau_x^{кор} \gg \tau \gg \Delta t.$$

Точность этого алгоритма определим в предположении, что $x(t)$ — гауссовский процесс, $R_x^{(1)} > 0$, $\Delta t \ll T \ll \tau_x^{кор}$, а запаздывание $\tau \rightarrow \Delta t$. В этом случае дисперсия

$$D[\langle c_{\nu}^{(1)}(\Delta t) \rangle_T] \approx \frac{(\Delta t)^2}{4(T - \tau)^2} \sum_{i=1}^{N-1} D[\{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)\}^2] = \\ = 3[\Delta t(T - \Delta t)] [R_x^{(1)} \Delta t]^2.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{D[\langle R_x^{(1)} \rangle_T]} / \langle R_x^{(1)} \rangle_T \approx \sqrt{3 \Delta t(T - \Delta t)}.$$

Таким образом, если $\Delta t \ll T$, то скорость спада КФ может быть оценена с высокой точностью даже по результатам наблюдений на интервале длительности $T \ll \tau_x^{кор}$.

В случае, когда дисперсия σ_x^2 неизвестна, для оценивания скорости спада целесообразно использовать выражение

$$\langle R_x^{(1)} \rangle_T = [\langle c_x^{(1)}(\tau) \rangle_T - \langle \sigma_x^2 \rangle_T], \text{ т. е. } \tau_x^{кор} \gg \tau > \Delta t, \quad (23)$$

в котором статистика $\langle c_x^{(1)} \rangle_T$ определяется соотношением (22).

Оценивание дисперсии медленных флуктуаций. Полагая, что в представлении (7) $s_x(t) = 1$ степени $l < \infty$. Исходя из (13), (18) и (22), определяем, что для оценивания дисперсии можно использовать статистику

$$\langle \sigma_x^2 \rangle_T = \langle c_x^{(2)}(\tau) \rangle_T - \langle \sigma_x^2 \rangle_T, \quad \tau \gg \tau_x^{кор}, \quad \rho \gg 1 \quad (24)$$

Если же заранее известно, что $\sigma_x^2 = 0$, то вместо (24) целесообразно использовать статистику

$$\langle \sigma_x^2 \rangle_T = \langle c_x^{(2)}(\tau) \rangle_T, \quad \tau \gg \tau_x^{кор}, \quad \rho \gg 1. \quad (25)$$

Достаточно точное оценивание дисперсии σ_x^2 возможно лишь при длительности наблюдений $T \gg \tau_x^{кор}$, однако вывод формул, определяющих характеристики алгоритмов (24) и (25), выходит за рамки данной работы. Отметим лишь, что при $\sigma_x^2 = 0$ и $l = 0$ точность алгоритма (25) определяется соотношением

$$\sqrt{D[\langle \sigma_x^2 \rangle_T]} / \sigma_x^2 \approx 1 / 3\tau_x^{кор} T \text{ при } T \gg \tau_x^{кор}, \quad \rho = 1. \quad (26)$$

а с ростом ρ точность снижается.

Сравнение выражений (3) и (26) показывает, что при $l = 0$, $\rho = 1$, $\lambda_0 = 0$ алгоритм (25) имеет несколько меньшую точность, чем алгоритм (2). Однако в отличие от (2) алгоритмы (24) и (25) обеспечивают (при соответствующем выборе ρ) несмещенность оценки дисперсии σ_x^2 даже в том случае, когда степень полинома $l \gg 1$ и средний уровень ТИ процесса, возможно, претерпевает ступенчатые изменения.

Мелкошка практического использования и результаты экспериментов. Практическое использование соотношений (22)–(24) состоит в следующем.

По результатам наблюдения ТИ процесса $y(t_i)$, $i = 1, N$ вычисляются статистические оценки НСФ $\langle c_x^{(p)}(\tau) \rangle_T$, определяемые соотношениями (8), (9), (11), (17), и строится их зависимость от запаздывания $\tau \geq \Delta t$ (при $\tau = 0$ оценки НСФ для всех $\rho \geq 1$ обращаются в нуль). Затем начальный участок зависимости $\langle c_x^{(1)}(\tau) \rangle_T$ аппроксимируется линейной функцией

$$\langle c_x^{(1)}(\tau) \rangle_T = a_0 + a_1 \tau, \quad \tau \geq \Delta t \quad (27)$$

Дисперсия быстрых флуктуаций σ_x^2 и скорость спада $R_x^{(1)}$ КФ медленных флуктуаций принимаются равными

$$\sigma_x^2 = a_0, \quad R_x^{(1)} = a_1, \quad (28)$$

причем при $a_0 \ll a_1 \Delta t$ влиянием быстрых флуктуаций можно пренебречь и принять $\sigma_x^2 = 0$.

Для нахождения дисперсии σ_x^2 исследуется поведение статистик (17) в области больших τ для значений $\rho = 1, 2, \dots$. Определяются натуральное число ρ_* и вре-

менной интервал запаздываний $[\tau_*, \tau_{**}]$ такие, что значения статистик (17) при $\rho \geq \rho_*$, $\tau \in [\tau_*, \tau_{**}]$ примерно равны одной и той же константе A_* , не зависящей от ρ и τ :

$$\langle c_x^{(p)}(\tau) \rangle_T \approx \langle c_x^{(p-1)}(\tau) \rangle_T \approx A_*, \quad \text{при } \rho \geq \rho_*, \quad \tau \in [\tau_*, \tau_{**}]. \quad (29)$$

Соотношения (29) свидетельствуют о том, что в пределах временных интервалов длительности $\rho_* \tau_*$ сдвиг стоящая ТИ процесса обусловленная ПТ, допускает представление в виде полинома степени $l - \rho_* - 1$. В качестве дисперсии медленных флуктуаций принимается величина

$$\sigma_x^2 = A_* - a_0, \quad (30)$$

где a_0 определяется исходя из представления (27).

При аппроксимации КФ $R_x(\tau)$ функцией вида (1) время корреляции

$$\tau_x^{кор} = (A_* - a_0) / a_1. \quad (31)$$

Обычно величина τ_* в 1,5–3 раза превосходит $\tau_x^{кор}$, а для нахождения константы A_* достаточно взять $\tau_{**} \approx 2\tau_*$. Тем самым в представлении (4) степень ПТ $l - \rho_* - 1$ должна быть согласована не с длительностью T интервала наблюдения, а с длительностью интервала корреляции $\tau_x^{кор} \ll T$.

Эмпирическая проверка соотношений (28)–(31) проводилась на псевдослучайном гауссовском процессе $y(t_i) = x(t_i)$, имеющем КФ вида (1), нулевое математическое ожидание, дисперсию $\sigma_x^2 = 1$ и время корреляции $\tau_x^{кор} = 50 \Delta t$; длительность реализации $T = 144 \tau_x^{кор}$. Такой процесс образуется с помощью рекуррентных преобразований [4, 7]: $x(t_{i+1}) = \rho x(t_i) + \sqrt{1 - \rho^2} \xi(t_{i+1})$, $i = 1, N-1$, в которых $N = 7200$, $\rho = \exp[-\Delta t / \tau_x^{кор}]$, $x(t_i)$, $\xi(t_i)$, $\xi(t_i)$ — независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, формируемые в результате обращения к стандартному программному датчику случайных чисел. Статистики $\langle c_x^{(p)}(\tau) \rangle_T$, $\rho = 1, 6$, вычисленные по формуле (17) на ЭВМ ЕС-1033, показаны графически на рис. 1. Из них можно заключить, что $\sigma_x^2 \approx 0$, $R_x^{(1)} \approx 1/(50 \Delta t)$, $A_* \approx 1$, $\sigma_x^2 \approx 1$, $\tau_x^{кор} \approx 50 \Delta t$, причем $\rho_* = 1$, а степень ПТ $l = 0$, что совпадает с истинными параметрами принятой модели.

Рассмотрим теперь пример применения изложенной методики к реальным ТИ процессам — перетокам мощности в энергосистемах. В качестве исходных данных для статистического анализа были взяты перетоки по высоковольтным линиям ВЛ 1 (шкала значений перетока от -1600 до +1600 МВт) и ВЛ 2 (шкала значений перетока от -264 до +264 МВт), записанные на перфокарты с дискретностью по времени $\Delta t = 0,5$ с и шагом квантования по уровню 0,1 МВт; длительность каждой реализации $T = 1$ ч.

Результаты расчета статистик (17) для перетоков по ВЛ 1 и ВЛ 2, выполненного на ЭВМ ЕС-1033, показаны на рис. 2 и 3. Из графика рис. 2 видно, что $\langle c_x^{(1)}(\tau) \rangle_T$ на начальном участке $\tau \geq \Delta t$ допускает представление в виде (27), причем $a_0 \approx 30 \text{ МВт}^2$, $a_1 \approx 1,84 \text{ МВт}^2/\text{с}$. Следовательно, согласно (28) $\sigma_x^2 \approx 30 \text{ МВт}^2$, $R_x^{(1)} \approx 1,84 \text{ МВт}^2/\text{с}$. С увеличением τ кривые $\langle c_x^{(p)}(\tau) \rangle_T$, $\rho = 1, 2, 3$ резко растут, что свидетельствует

² Программирование и расчеты на ЭВМ выполнены с участием В. В. Бродского и С. В. Макушкина.

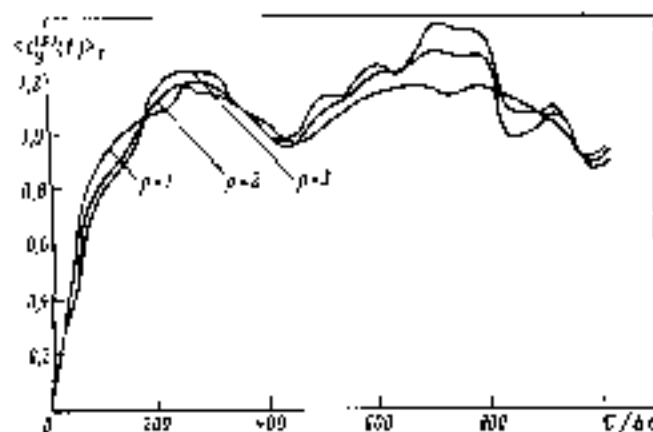


Рис. 1. Выборочные нормированные структурные функции для псевдослучайного процесса

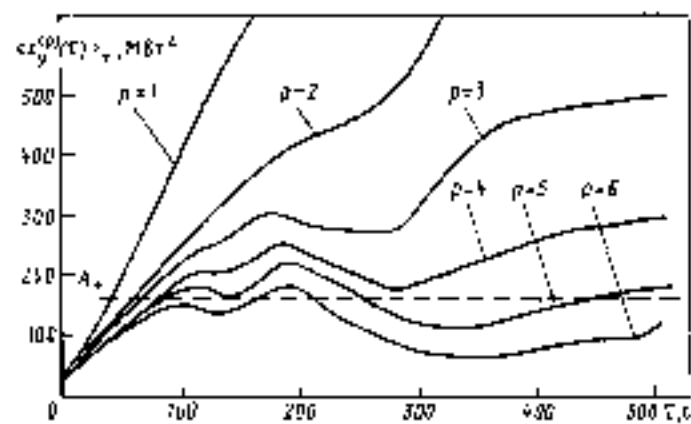


Рис. 2. Выборочные нормированные структурные функции для перетоков по ВЛ 1

об изменчивости среднего уровня процесса. У кривых $\langle \varepsilon_y^{(p)}(\tau) \rangle_\tau$, $p=4, 5, 6$, на участке со значениями $\tau=100-500$ с рост практически отсутствует и приближенно можно считать выполненными соотношения (29), в которых $p_*=4$, $A_* \approx 160 \text{ МВт}^2$, $\tau_{*s} \approx 100$ с, $\tau_{*n} \approx 500$ с. Отсюда с помощью (30), (31) получаем дисперсию и время корреляции медленных флуктуаций перетока по ВЛ 1

$$\sigma_x^2 \approx 135 \text{ МВт}^2, \tau_x^{\text{кор}} \approx 70 \text{ с.} \quad (32)$$

В пределах временных интервалов 400–2000 с степень ПТ процесса может быть принята равной $l=3$.

Аналогичным образом по графикам рис. 3 получаем $\sigma_x^2 \approx 2,4 \text{ МВт}^2$, $\sigma_1^2 \approx 0,023 \text{ МВт}^2/\text{с}$, $p_*=2$, $A_* \approx 7,9 \text{ МВт}^2$, $\tau_{*s} \approx 100$ с, $\tau_{*n} \approx 500$ с. Отсюда с помощью (28), (30), (31) находим вероятностные характеристики перетока по ВЛ 2 $\sigma_x^2 \approx 2,4 \text{ МВт}^2$, $R_x^{(1)} \approx 0,023 \text{ МВт}^2/\text{с}$,

$$\sigma_z^2 \approx 5,5 \text{ МВт}^2, \tau_z^{\text{кор}} \approx 240 \text{ с.} \quad (33)$$

причем в пределах интервалов времени 800–1000 с степень ПТ может быть принята равной $l=1$. Заметим, что при больших τ статистики (17) для перетока по ВЛ 2 достигают примерно одного и того же «стационарного» уровня A_* уже начиная с $p=p_*=2$. Поэтому изменчивость среднего уровня здесь существенно меньше, чем у перетока по ВЛ 1.

На рис. 4 показаны оценки КФ этих перетоков, вычисленные по известным формулам:

$$\langle R_y(\tau) \rangle_\tau = \frac{\Delta t}{T - \tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} [y(t_i) - \mu_T][y(t_i + \tau) - \mu_T],$$

$$\mu_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i),$$

ориентированным на стационарные процессы. Получаемые из рис. 4 оценки дисперсии и времени корреляции для перетока по ВЛ 1 ($\sigma_x^2 \approx 2000 \text{ МВт}^2$, $\tau_x^{\text{кор}} \approx 500$ с) и перетока по ВЛ 2 ($\sigma_x^2 \approx 65 \text{ МВт}^2$, $\tau_x^{\text{кор}} \approx 1450$ с) существенно отличаются от величин (32), (33), так как в действительности исследуемые ТИ процессы не являются стационарными.

Применение результатов статистического анализа для оценки точности дискретного представления ТИ процессов. Из данных статистического анализа следует, что перетоки мощности по ВЛ 1 и ВЛ 2 допускают

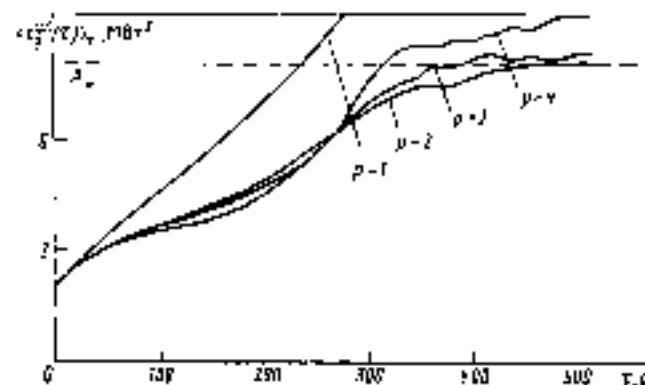


Рис. 3. Выборочные нормированные структурные функции для перетоков по ВЛ 2

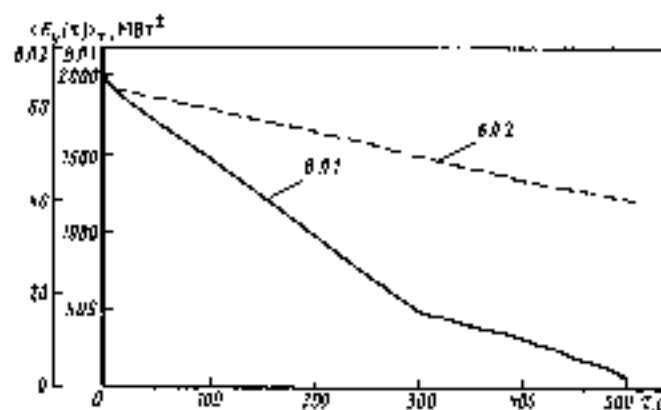


Рис. 4. Выборочные корреляционные функции перетоков по ВЛ 1 и ВЛ 2, не учитывающие значение среднего уровня

представление в форме (7), причем $x(t)$ имеет корреляционную функцию вида (1), $\xi(t)$ характеризуется временем корреляции $\tau_x^{\text{кор}} \ll \Delta t = 0,5$ с, процессы $x(t)$ и $\xi(t)$ не коррелированы между собой. Положим теперь, что ТИ процесс вида (7) подвергается дискретизации по времени с периодом $T_d \gg \Delta t$ и квантованию по уровню с шагом h ; через $v(i)$ обозначим ступенчатую аппроксимирующую функцию, сформированную по результатам квантованных отсчетов. Исходя из [6], нетрудно показать, что при $\tau_x^{\text{кор}} \gg T_d \gg \tau_x^{\text{кор}}$, $h \ll \sigma$ средний квадрат ошибки (СКО) ступенчатой аппроксимации