

1 Einleitung

Gegenstand der Vorlesung **Grundlagen der Elektrotechnik 2** (Wechselstromlehre 1.Teil; 2.Trimester) war die Behandlung ausschließlich „sinusförmiger Vorgänge“ in der Elektrotechnik.

Die Vorlesung **Grundlagen der Elektrotechnik 3** (Wechselstromlehre 2.Teil; 3.Trimester) stellt nun die Erweiterung auf zunächst „periodische nichtsinusförmige Vorgänge“, anschließend auf „nichtperiodische Vorgänge“ (z.B. Schaltvorgänge) dar.

Daraus ergibt sich die folgende kurze Inhaltsübersicht:

- Periodische nichtsinusförmige Vorgänge:
 - o Fourier-Reihe in reeller und komplexer Form;
 - o Mittelwerte und Leistungsdarstellung;
- Nichtperiodische Vorgänge (instationäre oder Ausgleichsvorgänge):
 - o Fourier-Integral in komplexer und reeller Form;
 - o Analyse von Schaltvorgängen mit Fouriermethode („Spektralbereich“);
 - o Analyse von Schaltvorgängen mit Differentialgleichungen („Zeitbereich“);

Zunächst einige einführende Bemerkungen zu nichtsinusförmigen Vorgängen in der Wechselstromlehre

Im 2.Trimester wurden ausschließlich sinusförmige Vorgänge behandelt, z.B.

Sinusförmige Spannung in reeller Darstellung:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Sinusförmige Spannung in komplexer Darstellung:

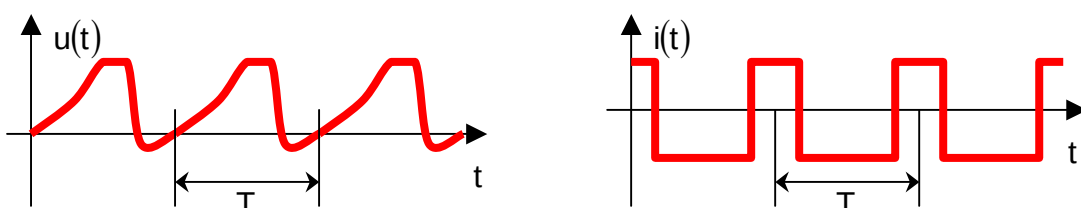
$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= u_r(t) + j \cdot u_i(t) = \\ &= \hat{U} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)) = \\ &= \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \\ &= \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

mit: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ (komplexe Amplitude)

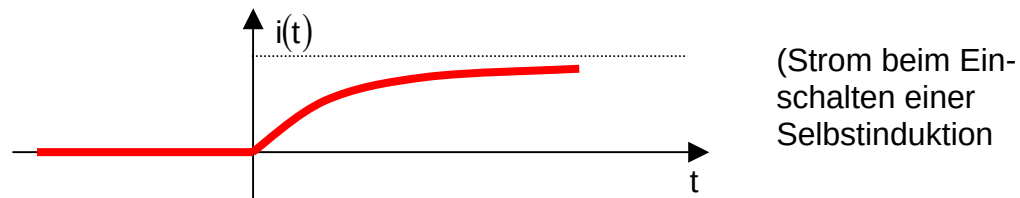
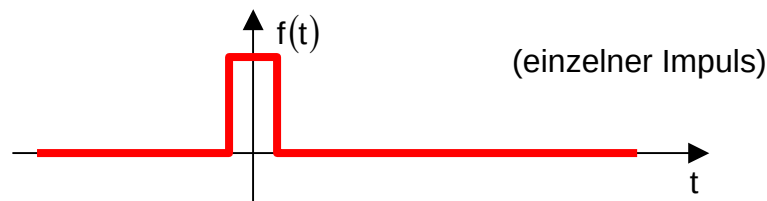
Ein Schwerpunkt lag bei der Einführung der „komplexen Rechnung“ (komplexe Amplituden, Leitwerte, Widerstände, Übersetzungsverhältnisse), die gegenüber der „reellen Rechnung“ (Stichwort: Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen) große Vorteile besitzt (Betrag und Phase kommen „automatisch“ heraus).

Nun spielen in der Technik aber nichtsinusförmige Vorgänge (z.B. Schaltvorgänge, Impulstechnik, usw.) eine wesentlich größere Rolle. Wir teilen sie ein in

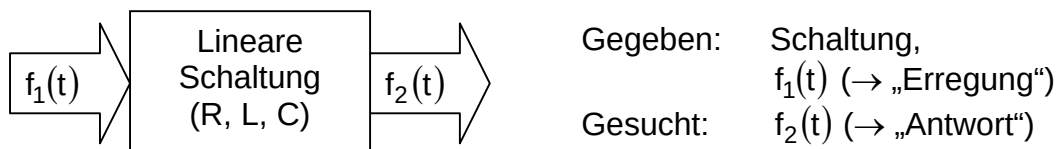
- Periodische nichtsinusförmige Vorgänge, z.B.



- Nichtperiodische Vorgänge, z.B.



Die Aufgabenstellung lautet meist folgendermaßen:



Die Methoden zur Behandlung solcher Aufgabenstellungen sind, allerdings nur für sinusförmige Vorgänge, aus dem 2. Trimester bekannt.

Bei nichtsinusförmigen Vorgängen sind die bisherigen Kenntnisse (insbesondere die komplexe Rechnung) nicht ohne weiteres anwendbar. Grundsätzlich existieren nun zwei Lösungswege:

- Weg über Differentialgleichungen:
Aus den Beziehungen an den Schaltelementen zwischen Spannung und Strom ($u(t) = R \cdot i(t)$, $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$) und den Kirchhoff'schen Gleichungen bauen wir eine Differentialgleichung (DGL) für die gesuchte Funktion $f_2(t)$ auf (wobei wir $f_1(t)$ bzw. „Anfangsbedingungen“ brauchen). Die DGL wird dann nach den Regeln der Mathematik nach $f_2(t)$ aufgelöst.
- Zurückführung des „nichtsinusförmigen“ Problems auf ein „sinusförmiges“.

Der zweite Weg ist (hauptsächlich) Gegenstand dieser Vorlesung. Man kann nämlich zeigen, daß nichtsinusförmige Funktionen in sinusförmige „Bestandteile“ zerlegt werden können (Fourierzerlegung, Fourieranalyse). Diese Fourierzerlegung führt

- bei periodischen Vorgängen auf eine Reihe (Fourier-Reihe),
- bei nichtperiodischen Vorgängen auf ein Integral (Fourier-Integral).

Jeden „Bestandteil“ der Zerlegung (Reihenglied bzw. Integrand $\times$ Frequenzintervall im Integral) kann man dann mit den im 2. Trimester behandelten Methoden „verarbeiten“ und aus den „verarbeiteten“ Bestandteilen hinterher die Lösung wieder zusammensetzen.

Anmerkung: Im Rahmen dieser Vorlesung werden natürlich hauptsächlich Zeitfunktionen (Zeit t als unabhängige Variable) behandelt. Die gezeigten Methoden lassen sich aber auch verallgemeinern (z.B. auf Ortsfunktionen $\rightarrow$ Mathematikvorlesung).

2 Periodische nichtsinusförmige Vorgänge

(Fourier-Analyse periodischer Vorgänge).

Jean Baptiste Fourier 1768-1830, französischer Physiker und Mathematiker (entwickelte auch die mathematische Theorie der Wärmeleitung, Kanonenrohre!).

2.1 Fourier-Reihe in reeller Darstellung

Vorbemerkungen:

Synthese:

Die Summe von Sinus- (Kosinus-) Funktionen unterschiedlicher Periodendauer (bzw. Frequenz) ergibt wieder eine periodische Funktion, deren „Grundfrequenz“ der größte gemeinsame Teiler der Einzelfrequenzen ist. Oder umgekehrt: Wir beginnen mit einer Sinusfunktion der (Grund-) Kreisfrequenz

$\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ und überlagern Sinusfunktionen mit ganzzahligen Vielfachen ($\kappa \cdot \omega_g$, mit $\kappa = 2, 3, \dots, \lambda, \dots, n$) der Grundfrequenz ω_g ($\kappa = 1$). Wir erhalten als Summe eine periodische Funktion der Grundperiode $T = \frac{2\pi}{\omega_g}$.

Es müssen noch Kosinusfunktionen herangezogen werden, da aus lauter (ungeraden) Sinusfunktionen natürlich auch wieder nur ungerade Summenfunktionen entstehen, was aber allgemein nicht gefordert werden darf.

Analyse: (Aufgabenstellung in diesem Kapitel)

Es sei nun eine beliebige periodische Funktion (Periodendauer T) gegeben (meistens stückweise analytisch im Periodenbereich vorgegeben). Diese periodische Funktion soll nun in die Sinus- und Kosinus-Funktionen zerlegt werden, aus denen sie aufgebaut ist. Es sind also die Amplituden der Sinus- und Kosinusteilschwingungen („Harmonischen“) mit ganzzahligem Vielfachen der Grundfrequenz $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ zu bestimmen.

Es sei nun eine periodische Funktion gegeben

$$f(x) = f(x \pm k \cdot 2\pi) \quad \text{mit: } k = 1, 2, 3, \dots$$

wobei x im Bogenmaß anzusetzen ist ($\rightarrow$ Periodendauer: 2π).

Anmerkung: Von der mathematisch dimensionslosen Darstellung gelangt man zu den physikalischen (dimensionsbehafteten) Schreibweisen für

- Zeitfunktionen mit der Substitution $x = \omega_g t$ ($\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ Grundfrequenz der in T periodischen Zeitfunktion)
 $f(\omega_g t) = f(\omega_g t \pm k \cdot \omega_g T) \Rightarrow f(t) = f(t \pm k \cdot T)$
- Ortsfunktionen mit der Substitution $x = \beta_0 l$ ($\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ der in λ periodischen Ortsfunktion)